Détermination d'une matrice de mise à l'échelle

Nicolas Petit

Détermination d'une matrice de mise à l'échelle

Nicolas Petit
Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
PSL Research University

On considère un système [4]

$$\dot{x} = Af(x)$$

avec A matrice $n \times n$ inconnue constante qu'on cherche à estimer. On mesure $x \in \mathbb{R}^n$, et on connaît f. On a établi le résultat suivant.

Un observateur asymptotique est, pour $L > 0$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}f(x) - L(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{A}} = -(\hat{x} - x)f(x)^T \end{cases}$$

Il converge asymptotiquement sous l'hypothèse d'excitation persistente [2, 3] : $\forall T, \exists \epsilon > 0$ tel que $\text{span}\{f(x(t)), t \in [T, T+\epsilon]\} = \mathbb{R}^n$.

Démonstration. On considère

$$V = \frac{1}{2}\|\hat{x} - x\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\hat{A} - A\right\|^2_{Frobenius}$$

avec, pour toute matrice $n \times n$, $\|N\|^2_{Frobenius} = \text{trace}(N^T N)$.

Il vient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{x}^T\left((\hat{A} - A)f(x) - L\tilde{x}\right) + \text{trace}(\tilde{A}^T\dot{\hat{A}}) \\ &= -L\|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}^T\tilde{A}f(x) - \text{trace}(\tilde{A}^T\tilde{x}f(x)^T) \end{aligned}$$

or, $\text{trace}(\tilde{A}^T\tilde{x}f(x)^T) = \text{trace}(f(x)^T\tilde{A}^T\tilde{x}) = \text{trace}(\tilde{x}^T\tilde{A}f(x)) = \tilde{x}^T\tilde{A}f(x)$, d'où

$$\dot{V} = -L\|\tilde{x}\|^2$$

Par le principe d'invariance de LaSalle [4] (en fait la version d'excitation persistente de ce résultat), la convergence de $\hat{A}$ vers A est garantie par la satisfaction des deux équations de l'ensemble invariant vers lequel on converge

$$x = \hat{x}, \qquad \hat{A}f(x) = Af(x)$$

Si l'hypothèse sur la persistence d'excitation est vérifiée, alors $\hat{A}$ converge asymptotiquement vers A. $\square$

Travaux réalisés par le Centre Automatique et Systèmes (CAS) commun à ARMINES et MINES ParisTech dans le cadre de la procédure RAPID, projet Lorelei financé par la DGCIS

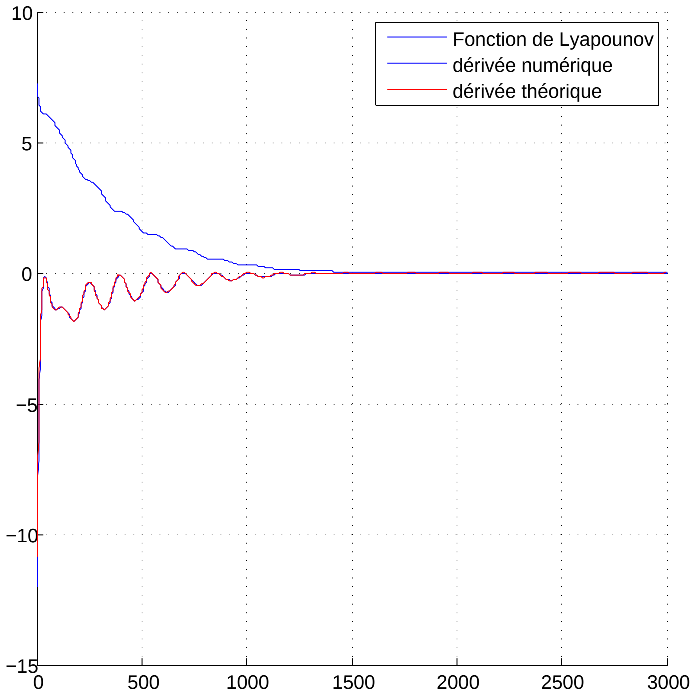

FIGURE 1 – Estimation d'une matrice de facteur d'échelle dans une dynamique (cas 2D).

Exemple en dimension 2 ou 3 On cherche à identifier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1.0000 & 0.2500 \\ 0.5000 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

La fonction f est choisie de telle sorte que x décrive un cercle dans le plan, ce qui satisfait la condition d'excitation persistente. La matrice est bien reconstituée

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1.0055262 & 0.2330998 \\ 0.4916656 & 1.9934972 \end{pmatrix}$$

La fonction de Lyapounov V est bien décroissante, voir Figure 1. Dans le cas 3D qui nous intéresse potentiellement pour les applications (la restriction à un plan étant tout à fait suffisante dans de nombreux cas), on obtient des résultats similaires, dès lors que la persistence d'excitation est bien garantie. La vitesse de convergence dépend de la quantité d'information présente dans le signal d'excitation, de la grandeur des gains, elle-même limitée par les bruits présents.

$$A = \begin{pmatrix} -1.0000 & 0.2500 & 0.1000 \\ -0.3000 & 2.5000 & 0.3800 \\ -0.1000 & -0.2000 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

La matrice est bien reconstituée

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.9860 & 0.2223 & 0.1128 \\ -0.2785 & 2.3826 & 0.3388 \\ -0.1213 & -0.1796 & 1.1825 \end{pmatrix}$$

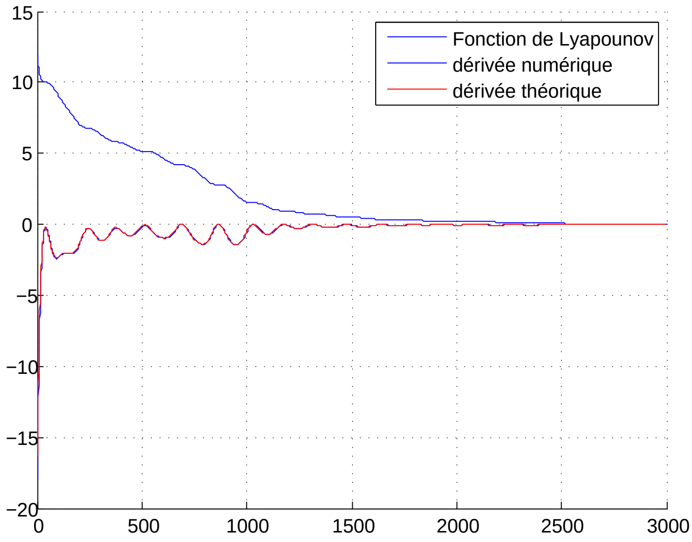

FIGURE 2 – Estimation d'une matrice de facteur d'échelle dans une dynamique (cas 3D).

Extension Si on s'abstrait de l'aspect filtrage, le problème qui nous préoccupe est celui de l'estimation d'une matrice reliant des entrées connues et des sorties connues. Soit e une entrée donnant une sortie s suivant une loi

$$s = Ae$$

où A est une matrice carrée. En utilisant la connaissance de e et de s, on va constituer un estimateur $\hat{A}$ de A.

On intègre les données (on pourrait rajouter un facteur d'oubli, voir plus bas) suivant l'équation $\dot{z} = s$ et on considère alors un estimateur $(\bar{z}, \hat{A})$ de z et de B suivant les équations $(\ell > 0)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{z} &= \hat{A}e - \ell\left(\bar{z} - z\right) \\ \frac{d}{dt}\hat{A} &= -\left(\bar{z} - z\right)e^T \end{aligned}$$

On peut initialiser ces équations avec un vecteur nul pour $\bar{z}$ et une matrice nulle pour $\hat{A}$. Avantageusement, on pourra mettre une matrice de calibration initiale plausible dans $\hat{A}$.

Sous des hypothèses de persistence d'excitation que nous allons formuler, cet observateur converge, i.e. $\hat{A} - A \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapounov [4]

$$V = \frac{1}{2}\left\|\bar{z} - \int_0^t Ae(\tau)d\tau\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\hat{A} - A\right\|_{Fr}^2$$

où $\|.\|_{Fr}$ désigne la norme de Frobenius [1] des matrices $\|M\|_{Fr}^2 = \mathrm{trace}(M^T M)$ pour toute matrice M.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V &= (\bar{z}-z)^T\left((\hat{A}-A)e - \ell\,(\bar{z}-z)\right) - \operatorname{trace}\left((\hat{A}-A)^T\dot{\hat{A}}\right)\\
&= (\bar{z}-z)^T\left((\hat{A}-A)e - \ell\,(\bar{z}-z)\right) - \operatorname{trace}\left((\hat{A}-A)^T(\bar{z}-z)e^T\right)
\end{aligned}$$

or on a,

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}((\hat{A}-A)^T\,(\bar{z}-z)\,e^T) &= \operatorname{trace}(e^T(\hat{A}-A)^T\,(\bar{z}-z))\\
&= \operatorname{trace}((\bar{z}-z)^T\,(\hat{A}-A)e) = (\bar{z}-z)^T\,(\hat{A}-A)e
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}V = -\ell\left\|\bar{z} - \int_0^t Ae(\tau)d\tau\right\|^2 \leq 0$$

D'après le principe d'invariance de LaSalle, l'estimateur converge vers le sous-ensemble tel que $\hat{z} - \int_0^t Ae = 0$. Il vient alors, en exploitant l'équation de la dynamique de l'observateur, dans l'ensemble invariant, $\hat{A}e(t) = Ae(t)$, c.-à-d. $(\hat{A}-A)e(t) = 0$ pour tout t. Sous l'hypothèse d'excitation persistente, qui dit que *lorsque t varie $e(t)$ engendre tout R^n*, alors $\hat{A}$ converge vers A.

Si désormais on introduit un facteur d'oubli exponentiel $\gamma > 0$ par ce qu'on a peut confiance dans les mesures anciennes, sous la forme

$$z(t) = \int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau))Ae(\tau)d\tau$$

alors on a

$$\dot{z} = -\gamma z + y$$

L'estimateur associé est simplement

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{z} &= -\gamma\bar{z} + \hat{A}e - \ell\,(\bar{z}-z)\\
\frac{d}{dt}\hat{A} &= -\,(\bar{z}-z)\,e^T
\end{aligned}$$

La preuve est identique. □

Références

[1] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices : Theory and Computation.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.

[2] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust adaptive control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.

[3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer, New York, 2nd edition, 1989.

[4] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems.* MacMillan, 1992.